Première composition de mathématiques

On considère la famille F de matrices à éléments réels :

$$M(e, a, b, c) = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \end{pmatrix} = eE + aA + bB + cC$$

1° Montrer que l'on peut munir F d'une structure d'espace vectoriel; quelle est la dimension de cet espace vectoriel?

2° Dans un espace affine euclidien orienté P, muni d'un repère orthonormé, on donne les points :

$$S_1(1, 1),\ S_2(-1, 1),\ S_3(-1, -1),\ S_4(1, -1);$$

on désigne par N l'une quelconque des matrices E, A, B ou C; montrer qu'à l'application matricielle :

$$N \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$$

on peut associer une isométrie f_N de P telle que :

$$f_N(S_i) = S_{k_i},\quad i = 1, 2, 3, 4.$$

En déduire la table de multipication des matrices E, A, B, C. De quelle structure peut-on alors munir F?

3° Montrer que le déterminant de $M(e, a, b, c)$ est le produit de formes linéaires du vecteur (e, a, b, c).

4° On considère dans cette question $M(e, a, b, c)$ comme la matrice d'un endomorphisme u de R^4 rapporté à sa base canonique.

a) A partir de la décomposition du 3°, déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de u. Par quelles transformations portant sur a, b, c l'ensemble des valeurs propres de u reste-t-il invariant?

b) Soit M_1 une matrice de F telle que $e + a + b + c = 0$; caractériser l'ensemble des matrices M'_1 de F telles que le produit $M_1M'_1$ soit la matrice nulle.

c) Soit M_2 une matrice de F telle que $M_2 = M(e, a, -e, -a)$; déterminer l'ensemble des matrices M'_2 de F telles que le produit $M_2M'_2$ soit la matrice nulle.

d) On considère le sous-ensemble G formé des matrices de F dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que G ne contient pas de matrices telles que e soit nul. Montrer que e est strictement positif pour toutes les matrices de G; comparer à e les valeurs absolues de a, b et c. Quelles sont, pour e fixé, les bornes de l'ensemble des valeurs propres des matrices de G? Ces bornes sont-elles atteintes?

e) Enoncer une condition caractéristique portant sur a, b, c, supposés non nuls, pour que u admette une valeur propre triple; que peut-on dire de l'espace propre associé?

5° On suppose dans cette question que e, a, b, c sont complexes; déterminer les matrices $M(e, a, b, c)$ dont les valeurs propres sont distinctes et telles que : $M^4 = E$.

6° On considère les fonctions numériques x, y, z, t de la variable réelle v, qui sont dérivables. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = M(1, -1, -1, -1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail